

Лекции

Ядерная физика

- Кампанов - Введение в физику ядра и частиц
  - Кисанов - Частицы и ядра
  - Мухом - Эксперимент. ядерная физика (том 1)
  - Винн / Мухомов - Ядерная физика
  - Савинев - Атомная и ядерная физика
  - Сивухин - Атомная и ядерная физика
  - Ядерная физика в интернете
- раздел общей физики

Эйнштейн (1905 г.):

$E = mc^2$  - известная формула, которая на самом деле выглядит, как

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

;  $\frac{v}{c} \ll 1$ ,  $E = \frac{mv^2}{2} + mc^2 = \frac{p^2}{2m} + mc^2$

$\frac{p^2}{2m}$  - кинетич. энергия?

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

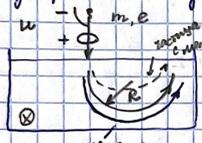
$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4$$

релятивист инвариант

1911 г. - Резерфорд открыл ядро!

Когда был открыт нейтрон, стало понятно, что атом состоит из протонов и нейтронов (после 1930х)

Как измерить массу частицы? С помощью массенциметра:



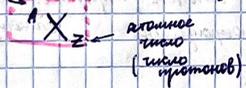
$$E = \frac{mv^2}{2} = eU$$

$$r_L = \frac{1}{c} \cdot v \cdot B = \frac{mv^2}{R}$$

$$R = f(m, e, U) = \frac{c}{B} \cdot \sqrt{\frac{2m}{e}} \cdot v$$

Важно, что  $R \sim \sqrt{m}$

масса протонов и нейтронов



$$A = Z + N$$

число протонов

Пример:  $^{235}_{92}\text{U}$  (уран)

масса ядра

$$Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n > M(A, Z)$$

дефект масс

Разницу в дефекте масс как раз и дал Эйнштейн:  $E = \frac{mv^2}{2} + mc^2$

$$M(A, Z) \cdot c^2 - Z \cdot m_p \cdot c^2 - (A - Z) \cdot m_n \cdot c^2 = -E_{св}(A, Z)$$

$$E_{св} = 13,6 \text{ эВ}$$

энергия связи (энергия необход., чтобы атом держался вместе)

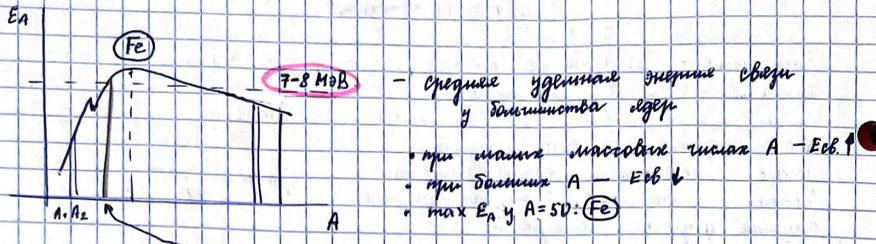
Массы принято измерять в энергиях. единица  $mc^2$ :

$$1 \text{ МэВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$$

- $m_p = 938 \text{ МэВ}$
- $m_n = 939 \text{ МэВ}$
- $m_e = 0,511 \text{ МэВ}$

$$E_A = \frac{E(A, Z)}{A}$$

удельная энергия связи



Иногда ядра  $A_1$  и  $A_2$  вообще сжигаются в более темное ядро - сумма

Иногда же вообще расщепляются - деление

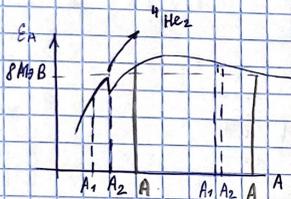
↓  
выделяется энергия

В характере взаимодействия внутри ядра протонов и нейтронов говорят, что они сильней связаны, превращают многократно ЭМ связь, а также, что они коррелирующиеся.

Взаимодействие атомных ядер

21.02.2024 г.

$E_{об}(A, z) = z \cdot m_p + (A - z) \cdot m_n - M(A, z)$  - энергия ядра



1)  $A = A_1 + A_2$ ,  $z = z_1 + z_2$

$A_1 X_{z_1} + A_2 X_{z_2} \rightarrow A X_z$

$M(A_1, z_1) + M(A_2, z_2) - M(A_1 + A_2, z_1 + z_2) = Q$

$Q > 0$  - процесс спонтан. выделяет <sup>момент</sup>  $\checkmark$  переходит самопроизвольно  
 $Q < 0$  - не спонтан. самопроизвольно  $\checkmark$  самопроизвольно

$E_{об}(A_1 + A_2, z_1 + z_2) = E_{об}(A_1, z_1) + E_{об}(A_2, z_2) = Q$

Из известной  $E_{об}(A, z) = E_n \cdot A$

Тогда  $E_{n_2}(A_1 + A_2) - E_{n_1} \cdot A_1 - E_{n_2} \cdot A_2 = Q$

мысли  $A_1 = A_2 = A$  (одинаковые ядра сжигаются в одно):

$E_{2n} \cdot 2A - E_n \cdot A - E_n \cdot A = 2A(E_{2n} - E_n) = Q$

$E_{2n} > E_n$ ,  $(Q > 0)$  - ядрами ядрами  $A_1$  и  $A_2$  вообще сжигаются в более темное ядро

2)  $A X_z \rightarrow A_1 X_{z_1} + A_2 X_{z_2}$

$A = A_1 + A_2$   
 $z = z_1 + z_2$

$M(A, z) - M(A_1, z_1) - M(A_2, z_2) = Q$

$Q = E_{об}(A_1, z_1) + E_{об}(A_2, z_2) - E_{об}(A_1 + A_2, z_1 + z_2)$

мысли  $A_1 = A_2 = A$ :

$Q = E_{n_1} \cdot A_1 + E_{n_2} \cdot A_2 - E_{n_{1+2}} \cdot (A_1 + A_2)$

$$2A \cdot E_A - 2A \cdot E_{2A} = 2A \cdot (E_A - E_{2A})$$

$E_A > E_{2A} \Rightarrow Q > 0$  - процесс деления более энерг. выгоден

Испод. кал-во: Изотопы - ядра, у которых одинак. число нейтронов, но разное протонив.

Изобары - ядра с одинаковым атомным числом  $A$ .

из-за того, что Изотопы - ядра с одинаковым  $n$  и  $Z$ , но разное массы, то часть массы уходит в энергию возбуждения?

Зеркальные ядра - ядра, у которых  $Z$  и  $n$  меняются местами:  
 ${}^A_Z X \leftrightarrow {}^A_{Z'} Y$

Магические ядра - ядра, у которых  $Z$  или  $n$  равняется одному из чисел: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126, ...

т.е. наибольшая  $E_{св}$   $\Rightarrow$  эти ядра более устойчивы

Являясь магн. ядра - ядра, у которых  $n$  и  $Z$ , и  $n$  равно одному числу.  
 пример -  ${}^4_2\text{He}$ .

### Свойства ядерного взаимодействия

1. Ядерные силы в основном мал интенсивнее ЭМ.
2. Ядерные силы короткодействующие.  
 Это следует из  $E_{св} = E_A \cdot A \sim A \Rightarrow$  нулевой взаимодейств. с ближайшими соседями  
т.к. потенциал у бозона  $\approx \frac{1}{r}$
3. Ядерные силы с возрастанием  $A$  насыщаются.

### Размер и форма ядра

Оценка:  $\bar{E}, E = ?$  эта энергия  $\rightarrow$  энергии покоя  $E_0 = 0.5 \text{ МэВ}$

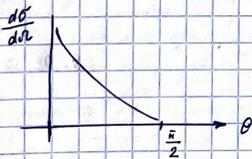
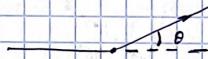
$$\lambda \sim 10^{-12} \text{ см}, \quad E = 100 \text{ МэВ}, \quad \hbar c = 200 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{25 \hbar c}{pc} = \frac{25 \cdot 200}{100} \text{ Фм}$$

форма ядра  $\approx$  брызги

$$E \approx pc \approx 12 \text{ Фм} \sim 10^{-12} \text{ см}$$

1)  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  - сечение рассеяния на точечной заряде:



$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{точ}} \sim \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

незатрафованное сечение  $\rightarrow$  невычетливост. приближение

$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{точ}}$   $\rightarrow$  в случае релятивизма  
 сечение Мотта

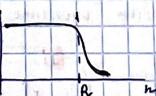


$\rho(\vec{r})$  - плотность распредел. заряда  
 (рассеяние на некоторой области)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |F(\vec{q})|^2 \cdot \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{точ}}$$

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) \cdot e^{i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r}$$

$$\vec{q} = \vec{p}' - \vec{p}$$



Плотн. ядра - заряженный шар, плотность заряда которая примерно одинакова, но резко падает на границе

Получаемая лег. резултат:



$$\Rightarrow R = R_0 \cdot A^{1/3}$$

$$R_0 \approx 1,3 \text{ Ом}$$

Плотность ядерной материи

Возмож. метод определения:

$$\rho = \frac{M}{V}$$

$$M = A \cdot m_p \Rightarrow E_{об}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \cdot A$$

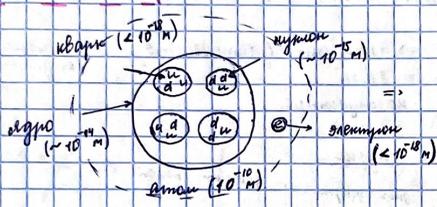
$$\rho \approx 1,3 \text{ г/см}^3$$

$$\rho = \frac{A \cdot m_p}{\frac{4}{3} \pi R_0^3 \cdot A}$$

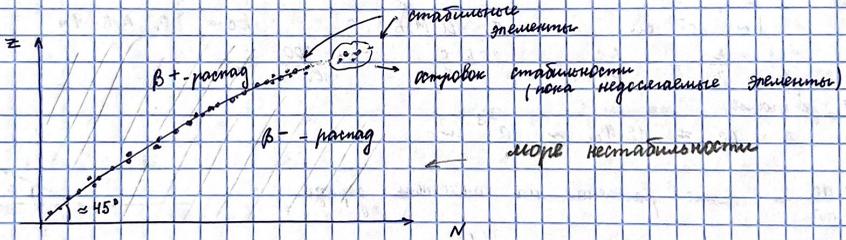
Вывод: Плотность ядерной материи примерно постоянна.

$$\approx \frac{10^{-24} \text{ г}}{4 \cdot 10^{-39} \text{ см}^3} = 0,25 \cdot 10^{15} \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 0,25 \cdot 10^{12} \frac{\text{кг}}{\text{см}^3} = 0,25 \cdot 10^9 \frac{\text{Т}}{\text{см}^3}$$

$$= 250 \frac{\text{млн. Т}}{\text{см}^3} \rightarrow \text{миллиарды тонн/см}^3 \quad !!!$$



Ядерные масштабы  
 Величина состоит в функции степени от радиуса



Канальная модель

28.02.2024 г.

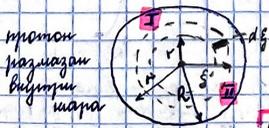
Формула Вайцзекера

Самая модель была предложена Ф. Бором

${}^7\text{Be}$  и  ${}^7\text{Li}$  - зеркальные ядра

$$E_{об}(\text{Li}) = 39,2 \text{ МэВ} \quad ; \quad E_{об}(\text{Be}) = 37,6 \text{ МэВ}$$

• Как оценить кинетическую энергию отталкивания?



Числа - ?  
 Энергия взаимодействия - ?

$$U = \int \rho \cdot \varphi(r) dV$$

$$\rho = \frac{e}{V} = \frac{e}{\frac{4}{3} \pi R^3}$$

I →  $r > \xi$ :  $\varphi = \frac{\rho \cdot 4\pi \xi^2 d\xi}{r}$  (сГС)

II →  $r < \xi$ :  $\varphi = \frac{\rho \cdot 4\pi \cdot \xi^2 d\xi}{\xi} = \rho \cdot 4\pi \cdot \xi d\xi$  (сГС)

$U = \int_0^R \rho \cdot 2\pi \cdot \int_0^R \varphi(r) dv$ ,  $dv = 4\pi r^2 dr$

$U = \frac{6}{5} \cdot \frac{Z \cdot e^2}{R}$  — энергия взаимодействия электрона с Z-ядромом

$Z = \frac{1}{2} \cdot Z \cdot (Z-1)$

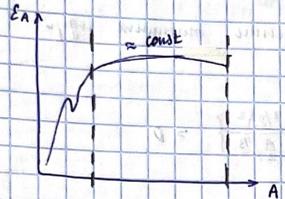
$U_{\text{вз.}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{Z \cdot (Z-1) \cdot e^2}{R}$

$R = 1,3 A^{1/3} \approx 2,5 \rho_H$

$\Delta = E_{\text{об}}(Li) - E_{\text{об}}(Be) \approx 1,6 \text{ МэВ} = 1,6 \cdot 1,6 \cdot 10^6 \cdot 10^{-12} \text{ эВ} = 2,56 \cdot 10^6 \text{ эВ}$

$e = 4,6 \cdot 10^{-10} \text{ эВ} \cdot \text{сГС}$

$\Delta = \frac{3}{5} \cdot \frac{(Z(Z-1) - (Z-1) \cdot (Z-2)) \cdot e^2}{R} = \frac{3}{5} \cdot \frac{(Z-2) \cdot e^2}{R} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2 \cdot 4,6^2 \cdot 10^{20}}{2,5 \cdot 10^{-13}} = \frac{6 \cdot 21,2}{5 \cdot 2,5} \cdot 10^{-7} = 10,1 \cdot 10^{-7} \text{ эВ}$



В 1-ом приближении полная энергия протонизированного массового ядра:

$E_{\text{об}}^{(2)} = a_1 \cdot A$  — обобщенный вклад в полную  $E_{\text{об}}$

• Факторы, уменьшающие  $E_{\text{об}}$ :

1) количество нуклонов  $\sim R^2 \sim A^{2/3}$



Нуклоны, находящиеся на поверхности, уменьшают обобщенный вклад:  $E_{\text{об}}^{(2)} = -a_2 \cdot A^{2/3}$  — пов-ный вклад

2) Кулоновский вклад уменьшает  $E_{\text{об}}$ :

$U = \frac{3}{5} \cdot \frac{Z \cdot (Z-1) \cdot e^2}{R} \Rightarrow E_{\text{об}}^{(3)} = -a_3 \cdot \frac{Z \cdot (Z-1)}{A^{1/3}} \approx -a_3 \cdot \frac{Z^2}{A^{1/3}}$ ,  $Z \gg 1$

$E_{\text{об}}(A, Z) = a_1 \cdot A - a_2 \cdot A^{2/3} - a_3 \cdot \frac{Z \cdot (Z-1)}{A^{1/3}}$

• Поправка на энергию симметрии:  $E_{\text{об}}^{(4)} = -a_4 \cdot \frac{(A-2Z)^2}{A}$

• Поправка на энергию спаривания:  $E_{\text{об}}^{(5)} = \delta \cdot a_5 \cdot A^{-3/4}$ ,  $\delta = \begin{cases} 1, & \text{н.н.} \\ -1, & \text{н.н.} \\ 0, & \text{н.н., н.ч} \end{cases}$

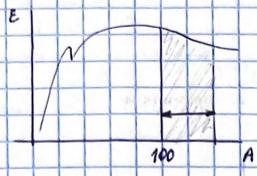
У четно-четных ядер энергия связи больше, чем у нечетно-нечетных и ч-н (н-ч).

• С учетом поправок получим  $A_n$ :

- $A_1 = 15,78 \text{ МэВ}$
- $A_2 = 17,8 \text{ МэВ}$
- $A_3 = 0,71 \text{ МэВ}$
- $A_4 = 23,7 \text{ МэВ}$
- $A_5 = 34 \text{ МэВ}$

Физические параметры ядер  
Ядра  
Деление атомных ядер

для скорости  
ядра



$$E(A, z) = a_1 \cdot A - a_2 \cdot A^{2/3} - a_3 \cdot \frac{z^2}{A^{1/3}} - a_4 \cdot \frac{(A-2z)^2}{A}$$

$a_1 \cdot A$  — объемный вклад  
 $a_2 \cdot A^{2/3}$  — поверх. вклад  
 $a_3 \cdot \frac{z^2}{A^{1/3}}$  — кулоновский вклад  
 $a_4 \cdot \frac{(A-2z)^2}{A}$  — паразитно-асимм. вклад  
 $a_4$  — вклад асимметрии

Дорожки парчи:

↓  
 для эллипсоидов поверх. вклад увелич., а кулонов. вклад уменьш., т.е. разность увеличивается

При деформировании ядра поперечн. вклад увелич. относительно центра (из-за увеличения площади ядра), а кулоновский увеличивает энергию связи.

Е<sub>кул.</sub> ~  $\frac{z^2}{A}$  — параметр деформации  
Е<sub>об.</sub> ~  $A$

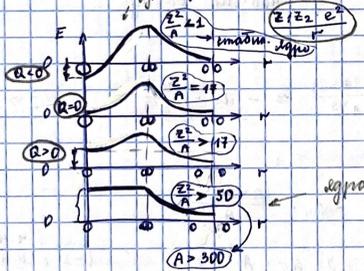
$Q = 2 \cdot E_{об}(\frac{A}{2}, \frac{z}{2}) - E_{об}(A, z) > 0$  — симметр. деление тяжелых ядер

Подставим ф-лу Вайцзекера:

$$a_2 \cdot \left\{ A^{2/3} - 2 \cdot \left(\frac{A}{2}\right)^{2/3} \right\} + a_3 \cdot \left\{ \frac{z^2}{A^{1/3}} - 2 \cdot \frac{(\frac{z}{2})^2}{(\frac{A}{2})^{1/3}} \right\} > 0$$

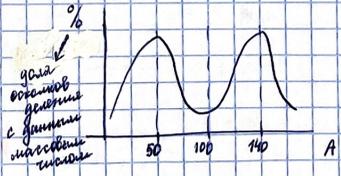
$\frac{z^2}{A} > 17$  выполняется при  $A > 100$   
 → в этом случае  $Q > 0$

условие спонтанного деления ядра

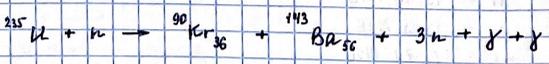


ядра не существуют ⇒ разваливаются

Интересно показывает, что ядра делится не симметрично!



Физ. причина: ядро делится на наиболее устойчивые (магний, кальций) → не всегда симметрично.

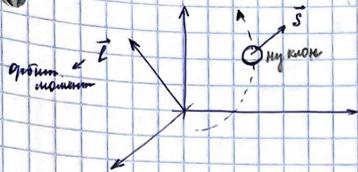


Спин ядра  
Магнитный момент

Момент импульса =  $[Rm \cdot c]$

$\hbar = [Rm \cdot c]$

Спин - собственный момент импульса частицы



Частица с целым спином - бозон

Частица с полуцелым спином - фермион

действ. принцип Паули

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$   
↑  
полный момент

$\vec{J} = \sum_{i=1}^n \vec{j}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{l}_i + \vec{s}_i)$   
↑  
полный момент ядра

Макс. знач. проекции полного момента ядра на вертикальное направление  $J_z$  называется спином ядра.

• связь магнит. момента и массы.  $(\mu \text{ и } l) ?$

Задача:



$m v R = l$   
 $I \cdot \pi R^2 = \mu$  ← магн. момент

$I = \frac{e v}{T}$  ← период обращения,  $T = \frac{2\pi R}{v}$

$I = \frac{e v}{2\pi R}$

$\mu = \frac{e}{2m} l = \frac{e \hbar}{2m} \cdot \frac{l}{\hbar}$   
↑  
магнитон Бора

$\frac{e \hbar}{2m}$  - ядерный магнетон

$\mu = l$  или  $\mu = b$  магнетонах  
 $l = b$  нуклонов - Протон

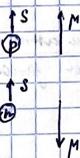
$\mu \neq S$

$\mu = g \cdot S$ , где  $g$  - гиромагнитное отношение

Экспериментальные значения:

	$g_p$	$g_n$
Протон p	1	5,5871
Нейтрон n	0	-3,8271

↑  
у нейтрона заряд  $q = 0$



Спин электрона (протограмма)  
Модель Томаса Ферми

Момент импульса в квант. механике измерить невозможно! (т.к. входит и импульс, и координата => они не коммутируют).

Из атомной физики:  $J^2 \psi = \hbar^2 \cdot J \cdot (J+1) \psi$

$\hat{J}_z \psi = \hbar^2 J_z \psi$

$|\vec{J}| = \hbar \cdot \sqrt{J(J+1)}$

Оператор спина:  $\hat{S} \psi = \hbar^2 \cdot (S+1) \cdot S \psi$

$|\vec{S}| = \hbar \cdot \sqrt{S(S+1)}$

$|\vec{S}| = \hbar \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

спинов квант. число

или  $S = \frac{1}{2}$

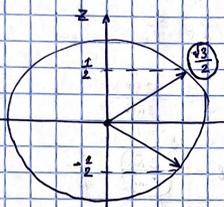
коммутатор

$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] \neq 0$

$[\hat{J}^2, \hat{J}_x] = 0$

невозможно измерить момент импульса

$S = \frac{1}{2}$



→ это - так выглядит проекция полного момента импульса на выделенное направление  $J_z$

Решения задачи для электрона:

1) У электрона - спин электрона спин электрона = 0

2) Если A - четное, то спин электрона четный. Если A - нечетное, то спин электрона нечетный.

$\vec{J} = \sum_{n=1}^A (\vec{L}_n + \vec{S}_n) = \sum_{n=1}^A \vec{j}_n$

$\vec{j}_n = \vec{L}_n + \vec{S}_n$

$|\vec{J}| \ll \sum_{n=1}^A |\vec{j}_n|$

электрон с спинным S число (самое большое S=5)

— механизм компенсации, обеспечивающие то, что спин закомпенсирован в разные стороны в одной совокупности

↑↑	0	↑↑
↑↓	↑	↑

График отношения моментов в КМ

$\vec{A}, \vec{B}$  - моменты импульса (матрица или оператор)

$\vec{F} = \vec{A} + \vec{B}$

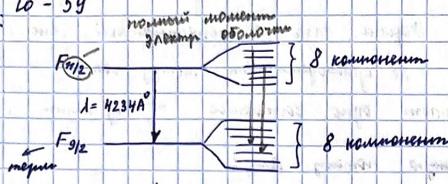
В квант. механике:  $|\vec{F}| = A+B, A+B-1, A+B-2, \dots, |A-B|$

$A = |\vec{A}|$

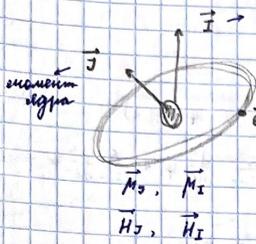
всего значений:  $2A+1$  при  $A \leq B$

$2B+1$  при  $B \leq A$

Квантовая структура атома водорода



Эксперимент →



Линии токовой структуры расщепились на дублет, или т.е. "сверхтонкая структура" (объясняется наличием магн. момента у ядра)

Возникает ситуация как с спин-орбитал. взаимодействием. E имеет спин, возникает магнитное поле, затем это магнитное поле взаимодействует с собой магн. моментом E и возникает возмущение

$$E_{H_0} \approx (\vec{H}, \vec{M})$$

$$E_{H_1} \sim (\vec{H}_I, \vec{M}_0) \quad \vec{H}_I \sim \vec{M}_I$$

$$E_{H_1} \sim (\vec{M}_I, \vec{M}_0) \sim (\vec{I}, \vec{J}) \quad \text{— это за взаимодействие?}$$

Поблизости приводит к сверхтонкой структуре?

$$\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$$

пусть  $(\vec{F} = A + B, A + B - 1, \dots, |A - B|$

$$A = 6, B = 3$$

тогда 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3

$$т.к. B \leq A: 2B + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \text{ уровней}$$

Рассмотрим наш случай:  $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$

$$(\vec{J} + \vec{I})^2 = J^2 + I^2 + 2(\vec{J} \cdot \vec{I})$$

$$(\vec{J} \cdot \vec{I}) = \frac{1}{2} \{ (\vec{J} + \vec{I})^2 - J^2 - I^2 \}$$

$$(\vec{J} \cdot \vec{I}) = \frac{1}{2} \cdot (F^2 - J^2 - I^2) \quad \text{или}$$

$$J^2 \psi = \hbar^2 \cdot J \cdot (J + 1) \psi$$

$$I^2 \psi = \hbar^2 \cdot I \cdot (I + 1) \psi$$

$$F^2 \psi = \hbar^2 \cdot F \cdot (F + 1) \psi \quad \Rightarrow |\vec{F}| = F \text{ — получается несколько значений: } (J + I)$$

Квантовое произведение  $(\vec{J} \cdot \vec{I})$  принимает столько же значений, сколько сумма векторов  $\vec{I}$  и  $\vec{J}$ .

$$(\vec{J} \cdot \vec{I}) \Rightarrow \begin{matrix} 2I + 1 & \text{при } I \leq J \\ 2J + 1 & \text{при } J \leq I \end{matrix}$$

Возвращаясь к эксперименту:  $\frac{11}{2} \cdot 2 + 1 = 12$  где  $F = 11/2$

Тогда  $2J + 1 = 8 \Rightarrow J = \frac{7}{2}$  где  $F = 9/2$

будет произведен

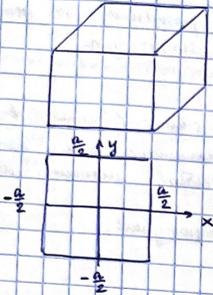
Модель Ферми

Модель свободного Ферми газа в потенциальной яме.

не взаимодействуют между собой → нет коллективных эффектов

Один фермион занимает одно состояние → принцип Паули

Рассмотрим трёхмерную потенциальную яму:



потенциал  $U(r) = \begin{cases} -U_0 & -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, y, z, \dots \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$

Ур-ние Шрёдингера:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(r) \right] \psi(x, y, z) = E \cdot \psi(x, y, z)$$

Выводим явное:  $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dy^2} \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} \psi = (E + U_0) \psi$

Разделим на  $\psi$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2}{dx^2} \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2}{dy^2} \psi - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2}{dz^2} \psi = \underbrace{(E + U_0)}_{const}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dx^2} = E_x$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dy^2} = E_y$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{dz^2} = E_z$$

$$E_x + E_y + E_z = E + U_0$$

$E$  (обозначили)

Рассмотрим одно из ур-ний:  $E_x - ?$

$$\psi = \psi(x) \cdot \psi(y) \cdot \psi(z)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\psi(x)} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = E_x$$

$$\psi(x) = C \cdot \sin(k_x \cdot x)$$

нормирован

Граничные условия:  $\psi(\frac{a}{2}) = \psi(-\frac{a}{2}) = 0$

$$\sin(k_x \cdot \frac{a}{2}) = 0$$

$$k_x \cdot \frac{a}{2} = \pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$k_x = \frac{2\pi n}{a}$$

Возьмем производную:

$$E_x = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left( \frac{2\pi n_x}{a} \right)^2$$

Тогда  $E_y = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left( \frac{2\pi n_y}{a} \right)^2$

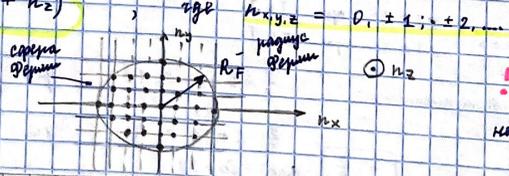
$$E_z = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left( \frac{2\pi n_z}{a} \right)^2$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{2\pi}{a} \right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

число состояний  $n_x, n_y, n_z$   $\leq R_F$

$$N = \frac{4}{3} \pi R_F^3$$

Уровни во состоянии



Сфера разделена затопленными состояниями от незатопленных!

Если все сост. замкнуты:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{2F}{a}\right)^2 \cdot R_F^2 \quad - \text{энергия Ферми}$$



$$E_F = \text{const}$$

$$E_F \sim 32 \text{ МэВ}$$

Энергия Ферми определяется концентрацией ядер, а она постоянна!

$$R_F = \frac{a}{2\pi\hbar} \cdot \sqrt{2m E_F}$$

Кинетический момент (продолжение)

20.03.2024г.

Магнетон - величина

$$\frac{e\hbar}{2mc}$$

$m = m_e$  - магнетон Бора

$m = m_p$  - магнетон

$$m_p \gg m_e$$

$$m_p = 1.67262 \cdot 10^{-24} \text{ г}$$

$$m_e = 9.10938 \cdot 10^{-28} \text{ г}$$

$$\frac{m_p}{m_e} = 1836,15 \pm 0,05 \quad - \text{важная характеристика, которая проверяется в измерениях}$$

$$6\pi^5 = 1836,12$$

- Магнитный момент ядра:  $\vec{\mu} = \sum (\text{магнит. момент нуклонов})$
- Магнитный момент  $\vec{\mu}$ :  $\vec{\mu} = \vec{\mu}_p + g_p \cdot \vec{S}_p + g_n \cdot \vec{S}_n$   
орбитальный момент      спиновый момент

в  $S$ -состоянии:  $\vec{L}_p = 0$

	-1/2	1/2
-1/2	-1	0
1/2	0	1

Кинетический момент этой системы:

$$j_z = -1, 0, 1 \quad , \quad j = 1$$

$$j_z = 0 \quad , \quad j = 0$$

Векторное расщепление (продолжение)



Энергия взаимодействия  $\sim$  скалярному произведению магнитных моментов (магнитный момент ядра создает магнитное поле и взаимодействует с магнитным моментом электронной оболочки).

$$E_{\vec{J}} \sim (\vec{H}_J, \vec{H}_I)$$

$$E_{\vec{J}} \sim (\vec{J}, \vec{I})$$

$$\vec{F} = \vec{i} + \vec{j}$$

← полный момент оболочки

$$|\vec{F}| = (I + J) \dots, \quad |I - J|$$

$$(\vec{j} \cdot \vec{i}) \Rightarrow \begin{matrix} 2I + 1 & \text{при } I \leq J \\ 2J + 1 & \text{при } J \leq I \end{matrix}$$

Пример:

$F_{\text{уд}}$



$J$  - 8 компонент

60-59

$F, L=5$

$$|\vec{F} + \frac{\vec{J}}{2}| = \frac{11}{2}$$

Если у края и есть эти, то  $J \leq I$  (т.к. 8 компонент)

$$5.5 \leq 8$$

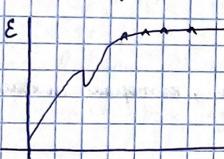
$$2J + 1 = 8 \Rightarrow J = \frac{7}{2}$$

Если края назад отодвинуть, можно сказать только  $J \leq I$ .

Оборот, то в таком момент. поле связь момент. момента края и оболочки разбивается, и количество наблюд. линий определяется простым законом Зельмана  $2J + 1$ . При этом происходит расщепление от  $-J, -J+1, -J+2, \dots, J$ . На этом принципе основан квантовый магнитный резонанс.

### Решетчатая модель ядра

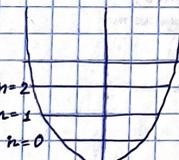
Все, что делают в кванте - это создают разные модели.



← магнитные кривые удельной энергии

2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 (это значение A - "кожух" на кривой)

Ядра, у которых только n или p = этому числу - магические ядра



$$U(r) = Ar^2$$

← к принципам Паули будет затягиваться

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + d(\vec{r}) \psi = E_n \psi$$

(не один, а три декартовых)

$$E_n = \hbar \omega \cdot (n + \frac{3}{2})$$

$$n = n_x + n_y + n_z ; \quad n = 0, 1, 2, \dots ; \quad n_{x,y,z} = 0, 1, 2, \dots$$

при  $n=0$ ,  $n_x = n_y = n_z = 0$

при  $n=1$ ,  $\begin{cases} n_x = 1, & n_y = n_z = 0 \\ n_y = 1, & n_x = n_z = 0 \\ n_z = 1, & n_x = n_y = 0 \end{cases}$  - это 3 состояния вырождения

возбужденные состояния

при  $n=2$ ,  $\left\{ \dots \right.$  - 6 состояний

$$g_n = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \quad \text{- кратность вырождения (число состояний)}$$

число нулевых: в 1 состоянии =  $(n+1) \cdot (n+2)$

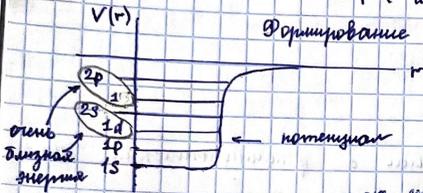
$n$	$(n+1) \cdot (n+2)$	число нулевых в ядре
0	2	2
1	6	8
2	12	20
3	20	40
4	30	70

Задачи по квантовой механике - Рунгер

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(r) \right] \psi = E \psi$$

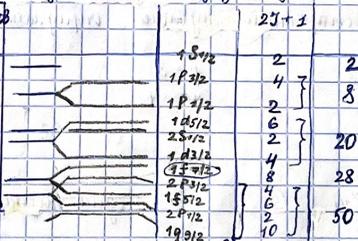
$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}$$

Формирование оболочек в этой потенциале (s, когда  $l=0$   
p, когда  $l=1$   
d, когда  $l=2$ )



число состояний (учит. на 2 уг-га вращательных движений)

Вост.	$l$	$2 \cdot (2l+1)$	число нулевых в ядре
1s	0	2	2
1p	1	6	8
1d	2	10	20
2s	0	2	
1f	3	14	40
2p	1	6	



магнетонные шпала

В центрально симметр. поле кратность вырождения  $2l+1$ .

Майер предположила, что ур-ние имеет вид:

будет ланше, или ланше  $l$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) + \kappa (\vec{L} \cdot \vec{S}) \right] \psi = E \psi$$

спин-орбит. взаимодействие



т.е. внутри ядра существует сильная связь (спин-орбит. взаимодействие) его структура не ЭМ

Стремится вырождение по полному моменту (к этому приводит спин-орбит. взаимодействие)

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$

$$(\vec{L} \cdot \vec{S}) \Rightarrow l + \frac{1}{2}, \quad |l - \frac{1}{2}|$$

при  $\vec{L} = \vec{i}, \quad \vec{S} = \frac{\vec{i}}{2}$

напряг расстояние с фиксированным  $l$  расщепится на 2

$$j = l + \frac{1}{2}, \quad l - \frac{1}{2}$$

$$j = 1/2, \quad 3/2$$

## Равновие положение оболочек

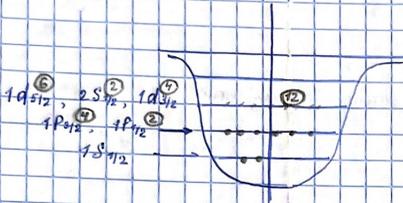
В ядре существует спин-орбитальное взаимодействие. В результате уровни энергии переступиваются, образуя новые оболочки. Состояние с близкими энергиями образуют новые оболочки. Малая гитига объяснила все магические числа и могла предсказать новые (острова стабильности).

1. Коллективное взаимодействие нуклонов можно описать введенным аддитивным сферически симметричным потенциалом.

2. В ядре существует сильное спин-орбит. взаимодействие, которое имеет зависимость от полного момента. Сост.  $l+1/2$  и  $l-1/2$  имеют разные энергии.

3. Состояния с близкими энергиями образуют оболочки.

4. Нейтроны и протоны занимают оболочки независимо друг от друга.



Затягивание оболочек приводит в соответствии с феноменологическим ста-

5. Последний неспаренный нуклон определяет спин ядра.

Пример:  ${}^7\text{Li}$ ,  $p=3$ ,  $n=4$

1s<sup>2</sup><sub>1/2</sub>, 1p<sup>2</sup><sub>3/2</sub>, 1p<sub>1/2</sub>, 1d<sup>5</sup><sub>3/2</sub>, 2s<sub>1/2</sub>, 1d<sub>3/2</sub>

→ один неспаренный протон

$$J = \frac{3}{2}$$

### Чётность ядерных состояний

Оператор чётности  $\hat{P}\psi(x, y, z) = \psi(-x, -y, -z)$  ↑ число

$$\hat{P}^2\psi(x, y, z) = \psi(x, y, z)$$

$$P^2 = 1$$

$$P = \pm 1$$

$P = 1$  - четное состояние

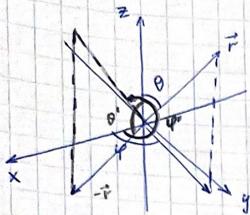
$P = -1$  - нечетное состояние

Четность состояний в сферически симметричном поле

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot P_l^m(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi}$$

$\downarrow$  радиальные волновые функции     
  $\downarrow$  полиномы Лежандра     
  $\downarrow$  угловая функция

- общее решение уравнения Шрёдингера в сферически симметр. поле



$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$$

$$\theta' = \pi - \theta$$

$$\varphi' = \pi + \varphi$$

$$\hat{r}\psi = R_{nl}(r) \cdot P_l^m(\cos(\pi - \theta)) \cdot e^{im(\pi + \varphi)}$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta \quad e^{im\pi} = (-1)^m$$

Свойство полинома:  $P_l^m(-x) = (-1)^{l-m} \cdot P_l^m(x)$  - без доказ.

Подставим:  $\hat{r}\psi = (-1)^l \cdot R_{nl}(r) \cdot P_l^m(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi}$

$\underline{p = (-1)^l}$

! Четность состояний определяется орбит. моментами (в центр. верр. симметр. поле)

Пример: при  $P_{3/2}$   $l = 1 \Rightarrow p = -1$  и значит след. образом  $J = 3/2^-$